

**LIBRIS**

We know  
books

**GHEORGHE ADALBERT SCHNEIDER**

**SĂ ÎNVĂȚĂM  
MATEMATICĂ  
FĂRĂ PROFESOR  
CLASA A XII – A  
PROFIL TEHNOLOGIC**

**EDITURA HYPERION  
CRAIOVA 2023**

	Enunțuri	Rezolvări
<b>1. Elemente de algebră</b> .....	5	141
<b>1.1 Grupuri</b> .....	5	141
<b>1.1.1</b> Lege de compoziție internă (operație algebrică), tabla operației, parte stabilă .....	5	141
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	5	
b) Probleme rezolvate .....	8	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	14	
<b>1.1.2</b> Grup, exemple de grupuri, grupuri de matrice, grupuri de permutări, $\mathbf{Z}_n$ .....	17	144
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	17	
b) Probleme rezolvate .....	17	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	23	
<b>1.1.3</b> Morfism și izomorfism de grupuri ..	25	146
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	25	
b) Probleme rezolvate .....	25	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	31	
<b>1.2 Inele și corpuri</b> .....	33	147
<b>1.2.1</b> Inele .....	33	147
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	33	
b) Probleme rezolvate .....	34	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	40	
<b>1.2.2</b> Corpuri .....	42	150
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	42	
b) Probleme rezolvate .....	42	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	47	
<b>1.3 Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ( <math>\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Z}_p, p</math> prim )</b> .....	49	153
<b>1.3.1</b> Forma algebrică a unui polinom, operații ( adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar ). Teorema împărțirii cu rest; împărțirea polinoamelor, împărțirea cu $X - a$ , schema lui Horner. Divizibilitatea polinoamelor, teorema lui Bezout, c.m.m.d.c și c.m.m.m.c a două olinoame .....	49	153
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	49	

	b) Probleme rezolvate .....	53	
	c) Probleme propuse spre rezolvare .....	59	
	<b>1.3.2</b> Rădăcini ale polinoamelor. Relațiile lui Viete pentru polinoame de grad cel mult 4 .....	62	156
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	62	
	b) Probleme rezolvate .....	64	
	c) Probleme propuse spre rezolvare .....	74	
	<b>1.3.3</b> Rezolvarea ecuațiilor algebrice .....	77	162
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	77	
	b) Probleme rezolvate .....	78	
	c) Probleme propuse spre rezolvare .....	80	
	<b>1.4</b> Teste grilă de autoevaluare .....	82	163
	Testul 1 .....	82	163
	Testul 2 .....	83	164
	Testul 3 .....	84	165
	Testul 4 .....	85	166
<b>2.</b>	<b>Elemente de analiză matematică .....</b>	<b>86</b>	<b>167</b>
	<b>2.1</b> Primitive .....	<b>86</b>	<b>167</b>
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	86	
	b) Probleme rezolvate .....	86	
	c) Probleme propuse spre rezolvare .....	89	
	<b>2.2</b> Integrala nedefinită .....	<b>91</b>	<b>168</b>
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	91	
	b) Probleme rezolvate .....	93	
	c) Probleme propuse spre rezolvare .....	96	
	<b>2.3</b> Metoda de integrare prin părți .....	<b>99</b>	<b>169</b>
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	99	
	b) Probleme rezolvate .....	99	
	c) Probleme propuse spre rezolvare .....	101	
	<b>2.4</b> Metoda de integrare prin schimbare de variabilă .....	<b>103</b>	<b>171</b>
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	103	
	b) Probleme rezolvate .....	104	
	c) Probleme propuse spre rezolvare .....	106	
	<b>2.5</b> Integrarea funcțiilor raționale .....	<b>109</b>	<b>172</b>
	a) Noțiuni teoretice și exemple .....	109	
	b) Probleme rezolvate .....	112	
	c) Probleme propuse spre rezolvare .....	115	
	<b>2.6</b> Teste grilă de autoevaluare .....	<b>117</b>	<b>174</b>
	Testul 1 .....	117	174

Testul 2 .....	118	174
<b>3. Integrala definită</b> .....	119	175
<b>3.1</b> Formula lui Leibniz-Newton. Proprietăți ale integralei definite .....	119	175
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	119	
b) Probleme rezolvate .....	120	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	123	
<b>3.2</b> Metode de calcul pentru integrala definită ..	125	177
<b>3.2.1</b> Metoda de integrare prin părți .....	125	177
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	125	
b) Probleme rezolvate .....	125	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	126	
<b>3.2.2</b> Metoda de integrare prin schimbarea de variabilă .....	128	179
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	128	
b) Probleme rezolvate .....	128	
c) Probleme propuse spre rezolvare ....	129	
<b>3.3</b> Integrarea funcțiilor raționale .....	131	181
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	131	
b) Probleme rezolvate .....	131	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	133	
<b>3.4</b> Teste grilă de autoevaluare .....	135	183
Testul 1 .....	135	183
Testul 2 .....	136	184
<b>4. Aplicații ale integralei definite</b> .....	137	185
a) Noțiuni teoretice și exemple .....	137	
b) Probleme rezolvate .....	137	
c) Probleme propuse spre rezolvare ...	139	

**Tiparul executat la  
EDITURII HYPERION SRL  
CRAIOVA**

# 1. Elemente de algebră

## 1.1 Grupuri

### 1.1.1 Lege de compoziție internă ( operație algebrică ), table operației, parte stabilă

#### a) Noțiuni teoretice și exemple

**Definiție.** Fiind dată o mulțime nevidă  $M$ , numim lege de compoziție pe mulțimea  $M$ , o funcție  $\varphi: M \times M \rightarrow M$ .

Legea de compoziție se notează cu diverse simboluri:  $+$ ,  $\cdot$ ,  $*$ ,  $\circ$ ,  $\perp$ ,  $\dots$  și atunci se folosește una din notații  $\varphi(x, y) = x + y$ ,  $\varphi(x, y) = x \cdot y$ ,  $\varphi(x, y) = x * y$ ,  $\dots$ .

- Exemple.** a) Operația de adunare „ $+$ ” pe mulțimile  $Z, Q, R, C$ .  
 b) Operația de înmulțire „ $\cdot$ ” pe mulțimile  $N, Z, Q, R, C$ .  
 c) Operațiile de adunare și înmulțire pe mulțimea matricelor  $M_n(C)$ .

**Observație.** Dacă mulțimea  $M$  este finită, atunci legea de compoziție  $\varphi$  poate fi reprezentată printr-un tabel.

**Exemplu.** Fie  $M = \{1, 2, 3\}$  și  $\varphi: M \times M \rightarrow M$ ,  $\varphi(x) = \min(x, y)$ .

Avem:  $\min(1, 1) = 1$ ;  $\min(1, 2) = 1$ ;  $\min(1, 3) = 1$ ;

$\min(2, 1) = 1$ ;  $\min(2, 2) = 2$ ;  $\min(2, 3) = 2$ ;

$\min(3, 1) = 1$ ;  $\min(3, 2) = 2$ ;  $\min(3, 3) = 3$ .

Tabelul este următorul:

$\varphi$	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

**Definiție.** Fie  $M$  o mulțime nevidă și  $\varphi: M \times M \rightarrow M$  o lege de compoziție pe  $M$ . O submulțime nevidă  $S \subset M$  se numește **parte stabilă** a lui  $M$  în raport cu legea  $\varphi$ , dacă oricare ar fi  $x, y \in S$ , rezultă  $\varphi(x, y) \in S$ .

**Exemple.** a) Mulțimile de numere  $N, Z, Q$  sunt părți stabile ale lui  $R$  în raport cu operația de adunare și în raport cu operația de înmulțire.

b) Dacă  $A$  este o mulțime nevidă, atunci mulțimea funcțiilor:

$F_{inj} = \{f: A \rightarrow A, f \text{ este injectivă}\}$  este parte stabilă a mulțimii

$F_A = \{f: A \rightarrow A\}$  în raport cu compunerea funcțiilor, deoarece compunerea a două funcții injective este tot funcție injectivă.

## Proprietăți

### 1) Asociativitatea

O lege de compoziție notată  $*$ :  $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  se numește **asociativă** dacă  $(\forall)x, y, z \in \mathbf{M}$  avem:  $(x * y) * z = x * (y * z)$ .

#### Exemple de legi asociative.

a) Adunarea pe mulțimile de numere  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$  este **asociativă** deoarece:  $(x + y) + z = x + (y + z)$  pentru orice  $x, y, z$  în fiecare din mulțimile din enunț.

b) Înmulțirea pe mulțimile de numere  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$  este **asociativă** deoarece:  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$  pentru orice  $x, y, z$  în fiecare din mulțimile din enunț.

c) Adunarea matricelor pe mulțimea  $M_n(\mathbf{C})$  este **asociativă** deoarece:  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,  $(\forall)A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$ .

d) Înmulțirea matricelor pe mulțimea  $M_n(\mathbf{C})$  este **asociativă** deoarece:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ,  $(\forall)A, B, C \in M_n(\mathbf{C})$ .

e) Compunerea funcțiilor pe mulțimea  $F_A = \{f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}\}$  este **asociativă** deoarece  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ ,  $(\forall)f, g, h \in F_A$ .

#### Exemple de legi care nu sunt asociative

a) Scăderea pe mulțimile  $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ , **nu este asociativă** deoarece:  $(4 - 2) - 5 \neq 4 - (2 - 5)$ .

b) Scăderea matricelor pe mulțimea  $M_n(\mathbf{C})$  **nu este asociativă**

$$\text{deoarece: } \left( \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq$$

$$\neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

### 2) Comutativitatea

O lege de compoziție notată  $*$ :  $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  se numește **comutativă** dacă  $(\forall)x, y \in \mathbf{M}$  avem:  $x * y = y * x$ .

#### Exemple de legi comutative

a) Adunarea pe mulțimile de numere  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$  este **comutativă** deoarece:  $x + y = y + x$  pentru orice  $x, y$  în fiecare din mulțimile din enunț.

b) Înmulțirea pe mulțimile de numere  $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$  este **comutativă** deoarece:  $x \cdot y = y \cdot x$  pentru orice  $x, y$  în fiecare din mulțimile din enunț.

c) Adunarea matricelor pe mulțimea  $M_n(\mathbf{C})$  este **comutativă** deoarece:  $A + B = B + A, (\forall) A, B \in M_n(\mathbf{C})$ .

### Exemple de legi care nu sunt comutative

a) Scăderea pe mulțimile  $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ , nu este **comutativă** deoarece:

$$5 - 3 \neq 3 - 5.$$

b) Scăderea matricelor pe mulțimea  $M_n(\mathbf{C})$  **nu este comutativă**

deoarece:  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

c) Compunerea funcțiilor pe mulțimea  $F_A = \{f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}\}$  **nu este comutativă** deoarece fiind date funcțiile  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x + 1, g(x) = x^2, (f \circ g)(x) = x^2 + 1$  și  $(g \circ f)(x) = (x + 1)^2$ .

### 3) Element neutru

O lege de compoziție notată  $*$ :  $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  admite **element neutru** dacă  $(\exists) e \in \mathbf{M}$  astfel încât să avem:  $x * e = e * x = x (\forall) x \in \mathbf{M}$ .

**Observație.** Dacă legea  $*$  este comutativă, atunci se determină  $e \in \mathbf{M}$  astfel încât  $x * e = x (\forall) x \in \mathbf{M}$ .

#### Exemple de legi care admit element neutru

a) Numărul 0 este **element neutru** în raport cu adunarea numerelor întregi, raționale, reale.

b) Numărul 1 este **element neutru** în raport cu înmulțirea numerelor întregi, raționale, reale.

c) Matricea  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  este **element neutru** în raport cu adunarea matricelor din  $M_2(\mathbf{R})$ .

#### Exemple de legi care nu admit element neutru

a) Mulțimea numerelor naturale pare  $\{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$  este parte stabilă a lui  $\mathbf{N}$  în raport cu înmulțirea și legea indusă de înmulțire pe această mulțime nu admite element neutru. Într-adevăr dacă ar exista  $e \in \{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$  încât  $e = ex = x (\forall) x \in \{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$ , atunci  $e = 2k = 1$  cu  $k \in \mathbf{N}$ , ceea ce nu se poate.

### 4) Elemente simetrizabile

Fie  $\mathbf{M}$  o mulțime nevidă și o lege de compoziție notată  $*$ :  $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  care admite element neutru. Un element  $x \in \mathbf{M}$  se numește simetrizabil în raport cu legea de compoziție  $*$  dacă

( $\exists$ )  $x \in \mathbf{M}$  astfel încât să avem:  $x * x' = x' * x = e$ . Elementul  $x'$  se numește simetricul elementului  $x$  față de legea de compoziție  $*$ .

**Observație.** Dacă legea de compoziție  $*$  este în plus și asociativă, atunci simetricul unui element  $x$  dacă există este unic.

**Teoremă.** Fie  $\mathbf{M}$  o mulțime nevidă și o lege de compoziție notată multiplicativ  $\cdot: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$  care este asociativă și care admite element neutru.

a) Dacă  $e \in \mathbf{M}$  admite element neutru, atunci  $e^{-1} = e$ .

b) Dacă  $x \in \mathbf{M}$  este inversabil, atunci și  $x^{-1}$  este inversabil și are loc relația:  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

c) Dacă  $x, y \in \mathbf{M}$  sunt inversabile, atunci și  $xy$  este inversabil și are loc relația:  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ .

**Exemple de elemente simetrizabile în raport cu o lege de compoziție**

a) Orice  $x$  întreg, rațional, real sau complex este simetrizabil în raport cu adunarea și admite ca simetric pe  $-x$ .

b) Orice  $x \neq 0$  rațional sau real este simetrizabil în raport cu înmulțirea și admite ca simetric pe  $\frac{1}{x}$ .

c) Orice matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbf{C})$  este simetrizabilă în raport cu adunarea matricelor și admite ca simetric pe  $-A$ .

**Exemple de elemente care nu sunt simetrizabile în raport cu o lege de compoziție**

a) Orice  $x \in \mathbf{N}^*$  nu este simetrizabil în raport cu adunarea deoarece  $-x \notin \mathbf{N}$ .

b) Orice  $x \in \mathbf{Z}^*$  nu este simetrizabil în raport cu înmulțirea deoarece  $\frac{1}{x} \notin \mathbf{Z}$ .

## b) Probleme rezolvate

1. Fie  $M = \{0, 1, 2\}$ . Stabiliți dacă  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbf{N}$  în raport cu fiecare dintre următoarele legi de compoziție:

a)  $x * y = x + y$

b)  $x * y = \max\{x, y\}$ .

**Soluție.** a) Tabelul este următorul:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

Evident  $M$  nu este parte stabilă a mulțimii  $N$  în raport cu  $x * y = x + y$ .

a) Tabelul este următorul:

max	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Evident  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $N$  în raport cu  $x * y = \max\{x, y\}$

2. Arătați în fiecare din următoarele cazuri că mulțimea  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $E$  în raport cu legea de compoziție specificată:

a)  $M = [-5, +\infty)$ ,  $E = \mathbf{R}$ ,  $x * y = xy + 5x + 5y + 20$ ;

b)  $M = (-1, 0)$ ,  $E = \mathbf{R}$ ,  $x * y = xy + x + y$ ;

c)  $M = (1, 2)$ ,  $E = \mathbf{R}$ ,  $x * y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$ .

**Soluție.** Se arate că  $(\forall)x, y \in M$  rezultă  $x * y \in M$ .

a)  $x, y \in [-5, +\infty) \Rightarrow x \geq -5, y \geq -5 \Rightarrow x + 5 \geq 0, y + 5 \geq 0$ .

$x * y \geq -5 \Leftrightarrow xy + 5x + 5y + 25 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 5)(y + 5) \geq 0$ , ceea ce este adevărat.

b)  $x, y \in (-1, 0) \Rightarrow x + 1 > 0, y + 1 > 0, x < 0, y < 0$ .

Se demonstrează:  $-1 < x * y < 0 \Leftrightarrow -1 < xy + x + y < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 1)(y + 1) > 0$  și  $x(y + 1) + y < 0$ , inegalități evident adevărate.

c)  $x, y \in (1, 2) \Rightarrow x = 1 + a, y = 1 + b$  unde  $a, b \in (0, 1)$ .

$$x * y = (1 + a) * (1 + b) = \dots = \frac{3ab - a - b + 1}{2ab - a - b + 1}$$

$$x * y > 1 \Leftrightarrow \frac{3ab - a - b + 1}{2ab - a - b + 1} > 1 \Leftrightarrow \frac{ab}{ab + (1 - a)(1 - b)} > 0$$

$$x * y < 2 \Leftrightarrow \frac{(1 - a) \cdot (1 - b)}{ab + (1 - a)(1 - b)} > 0$$

adevărată oricare ar fi  $a, b \in (0, 1)$ .

3. Arătați în fiecare din următoarele cazuri că mulțimea  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $E$  în raport cu legea de compoziție specificată:

a)  $M = [4, +\infty)$ ,  $E = \mathbf{R}$ ,  $x * y = \sqrt{x^2 + y^2 - 16}$ ;

b)  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ 3y & 4x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{N} \right\}$ ,  $E = \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ , adunarea matricelor;

c)  $M = (1, +\infty) \times (2, +\infty)$ ,  $E = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ,

$(x, y) * (x', y') = (xx' - x - x' + 2, yy' - 2y - 2y' + 6)$ .

**Soluție.** Se arate că  $(\forall)x, y \in M$  rezultă  $x * y \in M$ .

a)  $x, y \in [4, +\infty) \Rightarrow x \geq 4, y \geq 4 \Rightarrow x^2 \geq 16, y^2 \geq 16 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^2 + y^2 - 16 \geq 16 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 - 16} \geq 4 \Rightarrow x * y \in [4, +\infty)$ .

b) Fie  $A, B \in M \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 2b \\ 3b & 4a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & 2d \\ 3d & 4c \end{pmatrix}$ , unde

$a, b, c, d \in \mathbf{N} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} a+c & 2(b+d) \\ 3(b+d) & 4(a+c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 2f \\ 3f & 4e \end{pmatrix}$ ,

unde  $e = a + c \in \mathbf{N}$  și  $f = b + d \in \mathbf{N}$ . Deci  $A + B \in M$

c)  $(x, y), (x', y') \in M \Rightarrow x, x' > 1; y, y' > 2$ .

$(x, y) * (x', y') = (xx' - x - x' + 2, yy' - 2y - 2y' + 6)$

Se arată cu ușurință că  $xx' - x - x' + 2 > 1$  și

$yy' - 2y - 2y' + 6 > 2, (\forall)x, x' > 1; y, y' > 2$ . Deci  $(x, y) * (x', y') \in M$ .

4. Determină  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât mulțimea  $M = [1, +\infty)$  să fie parte stabilă a lui  $\mathbf{R}$  în raport cu legea  $x * y = xy - x - y + a$ .

**Soluție.** Trebuie să determinăm pe  $a \in \mathbf{R}$ , astfel încât oricare ar fi  $x, y \in M = [1, +\infty)$  să rezulte  $x * y \in M = [1, +\infty)$ .

Avem:  $x, y \in M = [1, +\infty) \Rightarrow x \geq 1, y \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0$  și  $y - 1 \geq 0$ .

$x * y \in M = [1, +\infty) \Leftrightarrow x * y \geq 1 \Leftrightarrow xy - x - y + a \geq 1 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow xy - x - y + 1 + a \geq 1 + 1 \Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) \geq 2 - a \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (y - 1)(x - 1) \geq 2 - a \Leftrightarrow 2 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$ .

5. Arătați că următoarele legi de compoziție sunt comutative:

a)  $x * y = 7xy - 7 \cdot (x + y) + 8$  pe  $(1, +\infty)$ ;

b)  $x * y = \frac{xy - 6}{x + y - 5}$  pe  $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ .

**Soluție.** Se arată mai întâi că mulțimile  $(1, +\infty)$  și  $(\frac{5}{2}, +\infty)$  sunt părți stabile ale lui  $\mathbb{R}$  în raport cu legea \* corespunzătoare.

a)  $x * y = 7xy - 7(x + y) + 8 = 7yx - 7(y + x) + 8 = y * x.$

b)  $x * y = \frac{xy-6}{x+y-5} = \frac{yx-6}{y+x-5} = y * x.$

6. Arătați că următoarele legi de compoziție nu sunt comutative:

a) înmulțirea pe mulțimea  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2x & 3y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{N} \right\};$

b)  $x * y = x^{y+1}$  pe  $\mathbf{N}.$

**Soluție.** a) Fie  $A, B \in M, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$  Atunci:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 28 & 20 \end{pmatrix} \text{ și } BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}. \text{ Evident } AB \neq BA \text{ și înmulțirea nu este comutativă.}$$

b) Luăm  $x = 2, y = 4$  și avem:  $2 * 4 = 2^{4-1} = 2^3 = 8$  și  $4 * 2 = 4^{2-1} = 4.$  Evident  $2 * 4 \neq 4 * 2$  și legea \* nu este comutativă.

7. Arătați că următoarele legi de compoziție sunt asociative:

a)  $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$  pe  $(-1, 1);$

b)  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}$  pe  $(1, +\infty).$

**Soluție.** a) Fie  $x, y, z \in (-1, 1).$  Avem:

$$(x * y) * z = \frac{x+y}{1+xy} * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy} \cdot z} = \dots = \frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy+(x+y)z}$$

$$= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}.$$

$$x * (y * z) = x * \frac{y+z}{1+yz} = \frac{x + \frac{y+z}{1+yz}}{1 + x \cdot \frac{y+z}{1+yz}} = \frac{x(1+yz) + y + z}{1+yz+x \cdot (y+z)} = \dots =$$

$$= \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}.$$

Evident  $(x * y) * z = x * (y * z) (\forall) x, y, z \in (-1, 1)$  și atunci legea \* este asociativă.

b) Fie  $x, y, z \in (1, \infty)$ . Avem: **We know**

$$\begin{aligned} (x * y) * z &= \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2} * z = \\ &= \sqrt{(x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2)z^2 - (x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2) - z^2 + 2} = \\ &= \dots = \sqrt{x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 - y^2 z^2 - z^2 x^2 + x^2 + y^2 + z^2}. \\ x * (y * z) &= x * \sqrt{y^2 z^2 - y^2 - z^2 + 2} = \\ &= \sqrt{x^2(y^2 z^2 - y^2 - z^2 + 2) - x^2 - (y^2 z^2 - y^2 - z^2 + 2) + 2} = \\ &= \dots = \sqrt{x^2 y^2 z^2 - x^2 y^2 - y^2 z^2 - z^2 x^2 + x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Evident  $(x * y) * z = x * (y * z)$   $(\forall) x, y, z \in (1, \infty)$  și atunci legea  $*$  este asociativă.

8. Arătați că următoarea lege de compoziție nu este asociativă:

$$x * y = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \text{ pe } \mathbf{R} - \{1\}.$$

**Soluție.** Fie  $0, 2, 3 \in \mathbf{R} - \{1\}$ . Avem:

$$0 * (2 * 3) = 0 * \frac{2+3}{2^2+3^2} = 0 * \frac{5}{13} = \frac{0+\frac{5}{13}}{0^2+(\frac{5}{13})^2} = \frac{13}{5}.$$

$$(0 * 2) * 3 = \frac{0+2}{0^2+2^2} * 3 = \frac{1}{2} * 3 = \frac{\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{4}+9} = \frac{14}{37}.$$

Evident  $0 * (2 * 3) \neq (0 * 2) * 3$  și legea  $*$  nu este asociativă.

9. Calculați elementul neutru față de legea:

a)  $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$  pe  $(0, 1)$ ;

b)  $x * y = x^{3 \ln y}$  pe  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ .

**Soluție.** a) Fie  $e \in (0, 1)$  elementul neutru. Deoarece legea  $*$  este comutativă determinăm pe  $e \in (0, 1)$  din egalitatea  $x * e = x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{xe}{2xe - x - e + 1} = x, (\forall)x \in (0, 1) \Leftrightarrow xe = 2x^2e - x^2 - ex + x$$

$$(\forall)x \in (0, 1) \Leftrightarrow 2e(x - x^2) = x - x^2 (\forall)x \in (0, 1).$$

Cum  $x \in (0, 1) \Rightarrow x - x^2 \neq 0$  și atunci simplificând cu  $x - x^2$  obținem  $2e = 1 \Rightarrow e = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ . Elementul neutru este  $\frac{1}{2}$ .

b) Fie  $E \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  elementul neutru. Deoarece legea  $*$  este comutativă determinăm pe  $E$  din egalitatea  $x * E = x \Leftrightarrow x^{3 \ln E} = x$  sau  $3 \ln E = 1 \Rightarrow \ln E = \frac{1}{3} \Rightarrow E = e^{\frac{1}{3}}$ .

10. Să se arate că nu există element neutru față de legea:

$$x * y = \frac{4xy + 3}{4x + 4y + 4} \text{ pe } \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right).$$

**Soluție.** Presupunem că există element neutru  $e$  față de legea  $*$  care este comutativă. Atunci  $x * e = x \Rightarrow \frac{4xe + 3}{4x + 4e + 4} = x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4xe + 3 = 4x^2 + 4xe + 4x \Rightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \notin \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$  și  $x_2 = -\frac{3}{2} \notin \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ .

11. Studiați simetrizabilitatea elementelor următoarelor mulțimi în raport cu legile de compoziție specificate:

a)  $M = [4, +\infty)$ ;  $x * y = \sqrt{x^2 + y^2} - 16$ ;

b)  $M = (0, 1)$ ;  $x * y = \frac{xy}{2xy - x - y + 1}$ .

**Soluție.** a) Se calculează mai întâi elementul neutru care este 4.

Deoarece legea  $*$  este comutativă, pentru orice  $x \in [4, +\infty)$  determinăm  $x' \in [4, +\infty)$  astfel încât  $x * x' = 4 \Rightarrow \sqrt{x^2 + x'^2} - 16 = 4 \Rightarrow x^2 + x'^2 - 16 = 16 \Rightarrow x'^2 = 32 - x^2 \Rightarrow x' = \sqrt{32 - x^2}$ .

Trebuie să demonstrăm că  $x' \in [4, +\infty) \Leftrightarrow x' \geq 4 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x'^2 \geq 16 \Leftrightarrow 32 - x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x^2 \leq 16$ , adevărat.

b) Elementul neutru este  $\frac{1}{2}$  și atunci avem:

$$x * x' = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{xx'}{2xx' - x - x' + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow x' = 1 - x.$$

Evident dacă  $x \in (0, 1) \Rightarrow x' \in (0, 1)$ .

## c) Probleme propuse spre rezolvare

1. Fie  $M = \{0, 1, 2\}$  și legile de compoziție pe  $\mathbf{N}$ :

- a)  $x * y = x + y$       b)  $x * y = x + 2y$       c)  $x * y = |x - y|$   
 d)  $x * y = |x + y|$       e)  $x * y = \max\{x, y\}$ .

Efectuați tabelul și stabiliți dacă  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbf{N}$  în raport cu fiecare lege de compoziție.

Arătați că  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbf{N}$  în raport cu un număr de legi de compoziție egal cu:

**0      1      2      3      4**

2. Fie  $M = \{0, 1, 2, 3\}$  și legile de compoziție pe  $\mathbf{N}$ :

- a)  $x * y = x + y$       b)  $x * y = x + 2y$       c)  $x * y = |x - 2y|$   
 d)  $x * y = |x + 2y|$       e)  $x * y = \max\{x, y\}$ .

Efectuați tabelul și stabiliți dacă  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbf{N}$  în raport cu fiecare lege de compoziție.

Arătați că  $M$  este parte stabilă a mulțimii  $\mathbf{N}$  în raport cu un număr de legi de compoziție egal cu:

**0      1      2      3      4**

3. Valoarea lui  $a \in \mathbf{C}$  astfel încât mulțimea  $M = \{-1, 1, i, a\}$  să fie parte stabilă a lui  $\mathbf{C}$  în raport cu înmulțirea este:

**-1      0      1      i      -i**

4. Valoarea lui  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât mulțimea  $M = [1, +\infty)$  să fie parte stabilă a lui  $\mathbf{R}$  în raport cu legea de compoziție  $x * y = xy - x - y + a$  este egală cu:

**-2      -1      0      1      2**

5. Valoarea lui  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât mulțimea  $M = (2, +\infty)$  să fie parte stabilă a lui  $\mathbf{R}$  în raport cu legea de compoziție  $x * y = xy - 2x - 2y + a$  este egală cu:

**2      3      4      5      6**

6. Valoarea lui  $a \in \mathbf{R}$  astfel încât mulțimea  $M = [1, +\infty)$  să fie parte stabilă a lui  $\mathbf{R}$  în raport cu legea de compoziție  $x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2} + a$  este egală cu: